

Sorin Peligrad



GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

pentru Evaluarea Națională
și olimpiadele școlare



Editura Paralela 45

CUPRINS

CUVÂNT-ÎNAINTE	5
EXTRAS DIN PROGRAMA PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI A VIII-A	7
PARTEA I. CONȚINUTURI DE GEOMETRIE ÎN SPAȚIU PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ.....	9
I.1. CORPURI GEOMETRICE.....	10
I.1.1. Piramida, piramida regulată, tetraedrul regulat.....	10
I.1.2. Prisma dreaptă, paralelipipedul dreptunghic, cubul	12
I.1.3. Cilindrul circular drept	14
I.1.4. Conul circular drept	14
I.2. PARALELISM.....	17
I.2.1. Dreptele paralele.....	17
I.2.2. Unghiul a două drepte necoplanare	17
I.2.3. Dreaptă paralelă cu planul	18
I.2.4. Plane paralele	20
I.2.5. Secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate; trunchiul de piramidă și trunchiul de con circular drept.....	21
I.3. PERPENDICULARITATE.....	23
I.3.1. Dreapta perpendiculară pe un plan.....	23
I.3.2. Distanța dintre două plane paralele, înălțimea unei prisme drepte, a paralelipipedului dreptunghic.....	24
I.3.3. Înălțimea unui cilindru circular drept	25
I.3.4. Înălțimea unui con circular drept.....	25
I.3.5. Înălțimea trunchiului de piramidă regulată	26
I.3.6. Înălțimea trunchiului de con circular drept.....	26
I.3.7. Plane perpendiculare	26
I.3.8. Aplicații: secțiuni diagonale, secțiuni axiale în corpurile studiate	27
I.4. PROIECȚII DE PUNCTE, DE SEGMENTE ȘI DE DREPTE PE UN PLAN ..	29
I.4.1. Proiecții de puncte, de segmente și de drepte pe un plan	29
I.4.2. Unghiul dintre o dreaptă și un plan: lungimea proiecției unui segment pe un plan	30

I.4.3. Unghi diedru, unghi plan corespunzător diedrului.....	31
I.4.4. Unghiul a două plane. Plane perpendiculare.....	32
I.5. TEOREMA CELOR TREI PERPENDICULARE.....	34
I.5.1. Teorema celor trei perpendiculare.....	34
I.5.2. Reciproca 1 a teoremei celor trei perpendiculare.....	36
I.5.3. Reciproca 2 a teoremei celor trei perpendiculare.....	37
I.5.4. Calculul distanței de la un punct la o dreaptă, calculul distanței de la un punct la un plan, calculul distanței dintre două plane paralele.....	39
I.6. DISTANȚE ȘI MĂSURI DE UNGHIURI PE FEȚELE SAU ÎN INTERIORUL CORPURILOR GEOMETRICE STUDIATE.....	43
I.7. ARII ȘI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE.....	47
I.7.1. Piramida regulată (cu baza triunghi echilateral sau pătrat).....	47
I.7.2. Prisma dreaptă (cu baza triunghi echilateral sau pătrat).....	52
I.7.3. Sfera: arie, volum.....	67

PARTEA A II-A. COMPLEMENTE DE GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

PENTRU OLIMPIADELE ȘCOLARE.....	69
II.1. DISTANȚA DINTRE DOUĂ DREPTE NECOPLANARE.....	70
II.2. PROBLEME DEOSEBITE DATE LA OLIMPIADELE ȘCOLARE.....	81
II.3. O PROBLEMĂ IMPORTANTĂ DATĂ LA OLIMPIADA NAȚIONALĂ ȘI CÂTEVA APLICAȚII ALE EI.....	94
II.4. TETRAEDRUL TRIDREPTUNGHIC. PROPRIETĂȚI.....	101
II.5. TETRAEDRUL ORTOCENTRIC.....	105
II.6. PROIECȚII ÎN SPAȚIU.....	107
II.7. TETRAEDRUL ECHIFACIAL.....	109
II.8. TEOREMA LUI MENELAUS ÎN SPAȚIU.....	112
II.9. TEOREMA LUI CEVA ÎN SPAȚIU.....	113
II.10. RELAȚIILE LUI VAN AUBEL ÎN SPAȚIU.....	115
II.11. CONCURENȚA MEDIANELOR ÎNTR-UN TETRAEDRU.....	116
II.12. CONCURENȚA BIMEDIANELOR ÎNTR-UN TETRAEDRU.....	117

PARTEA I

CONȚINUTURI DE GEOMETRIE ÎN SPAȚIU PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ



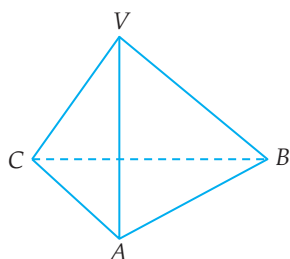
I.1. CORPURI GEOMETRICE

I.1.1. PIRAMIDA, PIRAMIDA REGULATĂ, TETRAEDRUL REGULAT

PIRAMIDA este corpul geometric determinat de un poligon plan și un punct care nu aparține planului care conține acel poligon.

Poligonul plan este **baza piramidei**, laturile poligonului sunt muchiile bazei, punctul exterior este **vârful piramidei**, iar segmentele determinate de vârful piramidei și vârfurile bazei sunt **muchiile laterale**.

Piramida cu baza triunghi se numește **piramidă triunghiulară** sau **tetraedru** (figura 1), piramida cu baza un patrulater se numește **piramidă patrulateră** (figura 2), piramida cu baza un hexagon se numește **piramidă hexagonală** (figura 3) ș.a.m.d.



sau

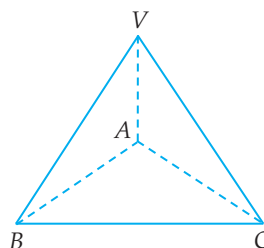


Fig. 1

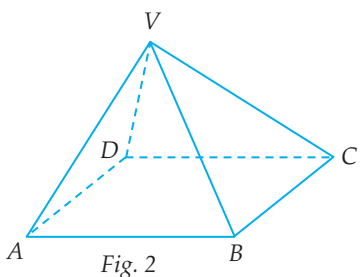


Fig. 2

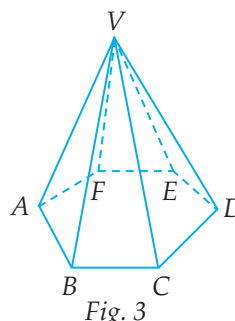


Fig. 3

Triunghiurile determinate de vârful piramidei și laturile poligonului de la bază sunt **fețele laterale**.

PIRAMIDA REGULATĂ este piramida care are baza poligon regulat și muchiile laterale congruente.

Într-o piramidă regulată fețele laterale sunt triunghiuri isoscele congruente.

Înălțimea unei fețe laterale într-o piramidă regulată se numește **apotemă**.

PIRAMIDA TRIUNGIULARĂ REGULATĂ are baza triunghi echilateral și muchiile laterale congruente (figura 4).

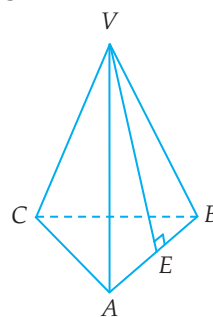


Fig. 4

TETRAEDRUL REGULAT este o piramidă triunghiulară regulată în care fețele laterale sunt triunghiuri echilaterale (figura 5).

Tetraedrul regulat are toate fețele triunghiuri echilaterale.

Într-un tetraedru regulat muchiile laterale sunt congruente cu muchiile bazei.

În figurile 4 și 5 segmentul VE este apotema piramidei.

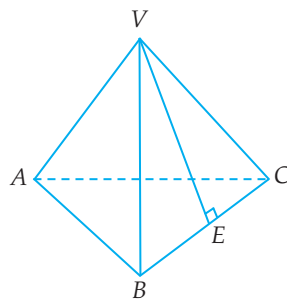


Fig. 5

PIRAMIDA PATRULATERĂ REGULATĂ este piramida regulată care are baza pătrat și muchiile laterale congruente (figura 6).

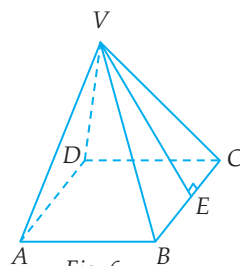


Fig. 6

PIRAMIDA HEXAGONALĂ REGULATĂ are baza hexagon regulat și muchiile laterale congruente (figura 7).

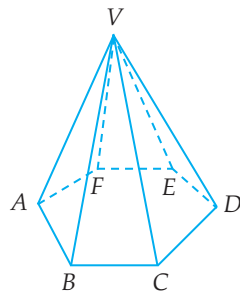


Fig. 7

Desfășurarea piramidelor regulate triunghiulare din figurile 4 și 5 sunt figurile 8, respectiv 9.

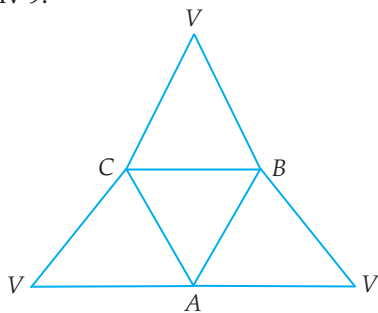


Fig. 8

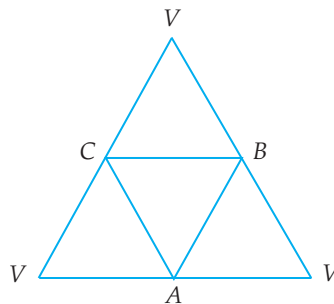


Fig. 9

Desfășurările piramelor regulate din figurile 6 și 7 sunt reprezentate în figurile 10 și 11.

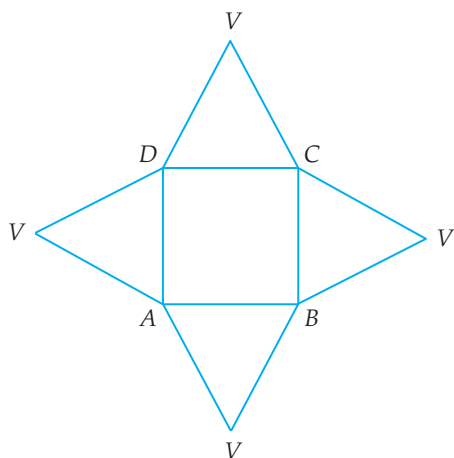


Fig. 10

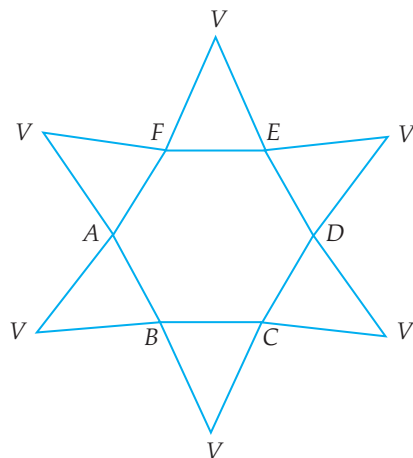


Fig. 11

Observație:

În figurile 8, 9, 10, 11 sunt reprezentate cele mai simple desfășurări ale corpurilor din figurile 4, 5, 6, respectiv 7.

Pentru fiecare corp există mai multe desfășurări, unele sunt mai greu de înțeles.

De exemplu, pentru tetraedrul din figura 5, o altă desfășurare este în figura 12.

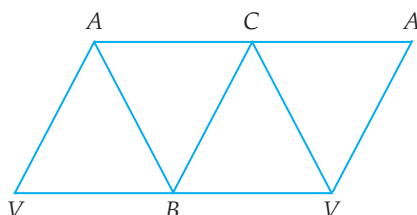


Fig. 12

I.1.2. PRISMA DREAPTĂ, PARALELIPEDUL DREPTUNGHIC, CUBUL

PRISMA este corpul geometric determinat de două poligoane plane congruente, situate în plane paralele.

- poligoanele plane congruente sunt bazele prisme;
- laturile acestor poligoane sunt muchiile bazelor;
- segmentele care au extremități vârfuri corespunzătoare ale bazelor se numesc muchii laterale;
- fețele laterale sunt paralelograme.

Dacă fețele laterale sunt dreptunghiuri, atunci prisma se numește prismă dreaptă.

PRISMA TRIUNghiULARĂ REGULATĂ

Prisma triunghiulară regulată este o prismă dreaptă cu baze triunghiuri echilaterale.

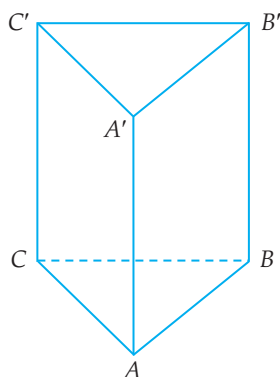


Fig. 1

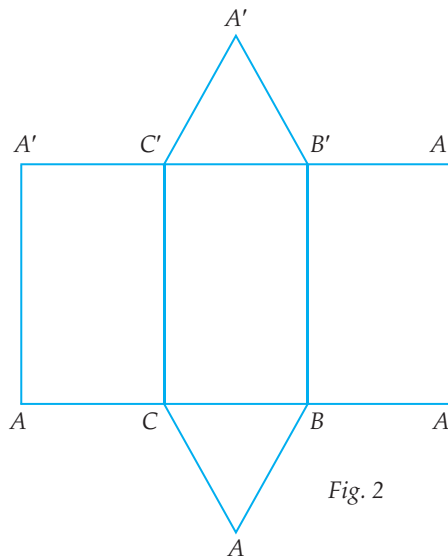


Fig. 2

În figura 1 este desenată o prismă triunghiulară regulată.

În figura 2 este reprezentată desfășurarea unei prisme triunghiulare regulate.

PARALELIPEDUL DREPTUNGHIIC este o prismă dreaptă care are bazele dreptunghiuri.

Paralelipipedul dreptunghiic are toate fețele dreptunghiuri.

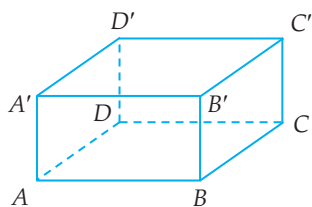


Fig. 3

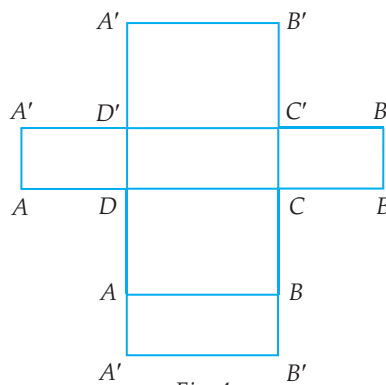


Fig. 4

În figura 3 este desenat un paralelipiped dreptunghiic.

În figura 4 este reprezentată o desfășurare a unui paralelipiped dreptunghiic.

PARTEA A II-A

**COMPLEMENTE DE GEOMETRIE ÎN SPAȚIU
PENTRU OLIMPIADELE ȘCOLARE**



II.1. DISTANȚA DINTRE DOUĂ DREPTE NECOPLANARE

Fiind date două drepte necoplanare, există o dreaptă și numai una care intersectează cele două drepte și este perpendiculară pe fiecare dintre ele. Această dreaptă se numește **perpendiculara comună** a celor două drepte.

Distanța dintre două drepte necoplanare este egală cu lungimea perpendiculararei comune.

În exemplul din figura 1 dreptele a și b sunt necoplanare, dreapta c este perpendiculara comună și distanța dintre dreptele a și b este egală cu lungimea segmentului AB .

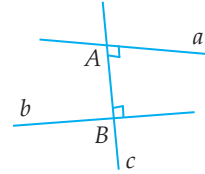


Fig. 1

Pentru aflarea distanței dintre două drepte necoplanare trebuie să determinăm perpendiculara comună și apoi să calculăm lungimea ei.

Sunt probleme în care perpendiculara comună este greu de determinat. Există teoreme care ne permit să aflăm distanța dintre două drepte necoplanare fără să determinăm perpendiculara comună.

Teorema 1:

Distanța dintre două drepte necoplanare este egală cu distanța dintre două plane paralele care conțin cele două drepte.

Demonstrație:

Fie AB perpendiculara comună a dreptelor necoplanare a și b . Deci $d(a, b) = AB$.

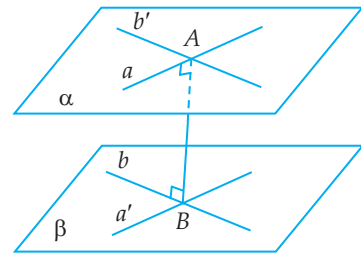
Fie $A \in a$ și $b' \parallel b$, $A \in b'$. Din $a \cap b' = \{A\} \Rightarrow \alpha = (a, b')$.

Fie $B \in b$ și $a' \parallel a$, $B \in a'$. Din $a' \cap b = \{B\} \Rightarrow \beta = (a', b)$.

$$\left. \begin{array}{l} a \parallel a', b \parallel b' \\ \text{Din } a, b' \subset \alpha, a \cap b' = \{A\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta. \\ a', b \subset \beta, a' \cap b = \{B\} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ \text{Din } AB \perp \beta \\ A \in \alpha, B \in \beta \end{array} \right\} \Rightarrow d(\alpha, \beta) = AB.$$

Din $d(a, b) = AB$ și $d(\alpha, \beta) = AB \Rightarrow d(a, b) = d(\alpha, \beta)$.



Teorema 2:

Distanța dintre două drepte necoplanare este egală cu distanța de la punctul de intersecție dintre una din ele și un plan perpendicular pe ea la proiecția celeilalte drepte pe acel plan.

Demonstrație:

Fie a și b dreptele necoplanare, $a \perp \alpha$, $a \cap \alpha = \{O\}$, $b' = \text{pr}_\alpha b$, $OC \perp b'$, $C \in b'$ și $\beta = (b, b')$.

Din $b' = \text{pr}_\alpha b$ și $\beta = (b, b') \Rightarrow \beta \perp \alpha$.

Din $b' = \text{pr}_\alpha b$, $C \in b' \Rightarrow$ există $B \in b$, astfel încât $C = \text{pr}_{b'} B$.

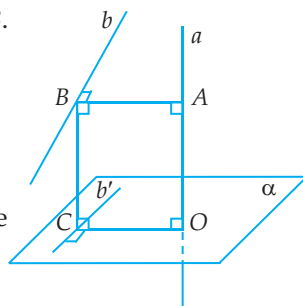
Din $b' = \text{pr}_\alpha b$, $C = \text{pr}_{b'} B \Rightarrow BC \perp \alpha$.

Ducem $BA \perp a$, $A \in a \Rightarrow \sphericalangle BAO = 90^\circ$ (1).

Din $BC \perp \alpha$, $OC \subset \alpha \Rightarrow BC \perp CO \Rightarrow \sphericalangle BCO = 90^\circ$ (2).

Din $AO \perp \alpha$, $OC \subset \alpha \Rightarrow AO \perp OC \Rightarrow \sphericalangle AOC = 90^\circ$ (3).

Din $AO \perp \alpha$ și $BC \perp \alpha \Rightarrow AO \parallel BC \Rightarrow A, B, C, O$ sunt puncte coplanare (4).



Din (1), (2), (3) și (4) $\Rightarrow ABCO$ este dreptunghi.

Din $ABCO$ – dreptunghi $\Rightarrow AB \parallel OC$ și $AB \equiv OC$.

Din $BC \perp CO \Rightarrow OC \perp BC$.

Din $\left. \begin{array}{l} OC \perp BC, BC \subset \beta \\ OC \perp b', b' \subset \beta \end{array} \right\} \Rightarrow OC \perp \beta$.

Din $OC \perp \beta$, $AB \parallel OC \Rightarrow AB \perp \beta$.

Din $AB \perp \beta$, $b \subset \beta \Rightarrow AB \perp b$.

Din $AB \perp b$ și $AB \perp a \Rightarrow d(a, b) = AB$.

Din $d(a, b) = AB$ și $AB \equiv OC \Rightarrow d(a, b) = OC$.

Teorema 3:

Distanța dintre două drepte necoplanare perpendiculare este egală cu distanța de la punctul de intersecție dintre una din ele și un plan perpendicular pe ea care conține cealaltă dreaptă. Perpendiculara din punctul de intersecție pe dreapta din plan este chiar perpendiculara comună.

Demonstrație:

Fie a și b drepte necoplanare perpendiculare, $C \in b$.

Ducem $CA \perp a$, $A \in a$. Notăm $(b, CA) = \beta$.

Din $CA \perp a \Rightarrow a \perp AC$.

Din $\left. \begin{array}{l} a \perp AC, AC \subset \beta \\ a \perp b, b \subset \beta \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp \beta$.

Ducem $AB \perp b$, $B \in b$.

Din $a \perp \beta$, $AB \subset \beta \Rightarrow a \perp AB \Rightarrow AB \perp a$.

Din $AB \perp a$ și $AB \perp b \Rightarrow AB$ este perpendiculara comună.

Deci $d(a, b) = AB$.

Situația din teorema 3 reprezintă un caz particular pentru dreptele necoplanare din teorema 2, când dreptele necoplanare sunt perpendiculare.

Teorema 4:

Volumul unui tetraedru este egal cu o șesime din produsul lungimilor a două muchii opuse înmulțit cu distanța dintre ele și cu sinusul unghiului format de cele două muchii.

